Abstract

In this paper we study the notion of perimeter associated with strongly A_∞ weights. We prove that the metric perimeter in the sense of L. Ambrosio and M. Miranda can be obtained as a Γ-limit of Modica-Mortola type degenerate integral functionals.

Sommario

In questo lavoro studiamo la nozione di perimetro associata a pesi strong-A_∞. Proviamo che il perimetro nel senso di L. Ambrosio e M. Miranda si può ottenere come Γ-limite di funzionali integrali degeneri di tipo Modica-Mortola.

I risultati che presentiamo sono stati ottenuti in collaborazione con il Prof. Bruno Franchi.

1 Introduzione.

Una funzione peso ω (cioé una funzione $\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\omega \geq 0$) si dice un peso della classe A_∞ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, se $E \subseteq Q$ soddisfa $|E| \leq \delta|Q|$ allora $\omega(E) \leq \varepsilon\omega(Q)$. La misura $d\mu = \omega\, dx$ è doubling.

La notazione che usiamo è standard. Per ogni insieme E misurabile secondo Lebesgue, denotiamo con $|E|$ la sua misura di Lebesgue e poniamo $\omega(E) := \int_E \omega(x)dx$; se B è una palla in $\mathbb{R}^n$, u_B è la media della funzione u sulla palla B, ovvero, $u_B = \fint_B u(y)\, dy = \frac{1}{|B|}\int_B u(y)\, dy$.

Ricordiamo adesso la nozione di peso $strong-A_\infty$, apparsa per la prima volta in [11], che caratterizza questa tipologia di pesi in termini di lunghezza di curve. Nel seguito supporremo sempre che il peso ω sia una funzione continua, per questo motivo daremo da subito la definizione di peso $strong-A_\infty$ solo in questo contesto (evitando i tecnicismi di una più generica definizione). Supporremo inoltre, senza perdere in generalità che ω sia limitato in $\mathbb{R}^n$.

Dato un peso $\omega \in A_\infty$ la misura distanza è

$$\delta(x,y) := \left\{ \int_{B^{\mathrm{Euc}}_{x,y}} w(u)\, du \right\}^{1/n}, \tag{1.1}$$

dove $B_{x,y}$ denota la palla euclidea di diametro $|x-y|$ che contiene sia x che y. D'altro canto, consideriamo un arco $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$ e definiamone la sua ω-lunghezza:

$$l_\omega(\gamma) = \int_0^1 \omega(\gamma(t))^{1/n} |d\gamma(t)|,$$

con $|d\gamma(t)|$ che denota la misura d'arco su γ (denoteremo la lunghezza euclidea di γ con $l(\gamma)$) . La distanza geodetica $d_\omega(x,y)$ è l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve che congiungono x a y. Come è provato in [11] si ha:

Proposizione 1. *Se $\omega \in A_\infty$ allora esiste $C > 0$ tale che*

$$d_\omega(x,y) \le C\,\delta(x,y) \tag{1.2}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 2. *Una funzione peso $\omega \in A_\infty$ appartiene alla classe dei pesi strong–A_∞ (brevemente $s - A_\infty$) se vale anche la disuguaglianza opposta, ovvero*

$$\delta(x,y) \le C\,d_\omega(x,y) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Le costanti forniscono esempi banali di pesi s-A_∞. Un esempio un po' meno semplice si ha considerando funzioni del tipo $\omega(x) = |x|^a$, $a \ge 0$; più in generale i determinanti Jacobiani di mappe quasi conformi sono s-A_∞. Ancora, ogni peso nella classe di Muckenhoupt A_1 è un peso s-A_∞. Sottolineiamo il fatto che la condizione s-A_∞ fa sì che ω si possa annullare su insiemi connessi non banali, che però non contengono un arco di curva rettificabile, ad esempio, si può annullare su insiemi di Cantor con dimensione di Hausdorff elevata (si veda a tale proposito la Proposizione 4.4 in [24]). Quindi, possiamo pensare ad un peso s-A_∞ se si considerano potenze della distanza da un insieme di punti sufficientemente sconnesso. Più in dettaglio, seguendo Semmes [24] Definizione 4.2, si può dare la seguente definizione.

Definizione 3. *Un chiuso $E \subsetneq \mathbb{R}^n$ si dice uniformemente disconnesso se esiste una costante $C_0 > 0$ tale che per ogni $x \in E$ e $r > 0$ esiste un insieme F tale che $E \cap B(x,r) \subseteq F \subseteq E \cap B(x, C_0 r)$ e $\mathrm{dist}^{\mathrm{Euc}}(F, E) \ge C_0^{-1} r$.*

Pensando alla precedente definizione, se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e uniformemente disconnesso, e $s > 0$, la funzione $\omega(x) = \min(1, \mathrm{dist}^{\mathrm{Euc}}(x,E)^s)$ appartiene alla classe dei pesi s-A_∞ ([24], § 4).

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ diremo che la palla $B(x,r)$ è una palla metrica, rispetto a d_ω, se $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d_\omega(x,y) \le r\}$.

Il risultato che segue è provato in [25] e afferma che la misura ωdx è doubling rispetto alle palle associate a d_ω, ed inoltre è *Ahlfors-regolare* di dimensione n.

Proposizione 4. *Esistono $a, A > 0$ in dipendenza solo da n e dalle costanti di (1.2) e (1.3) tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ si ha*

$$ar^n \leq \omega(B(x,r)) \leq Ar^n. \tag{1.4}$$

Inoltre, esiste $c > 0$ tale che per ogni $r > 0$ esiste $R = R(r)$ che verifica

$$B^{\text{Euc}}(x, cR) \subseteq B(x,r) \subseteq B^{\text{Euc}}(x, R) \tag{1.5}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Siamo interessati alla nozione di misura di ipersuperficie associata a pesi s-A_∞ (siamo volutamente vaghi per il momento). La proprietà cruciale che viene provata in [11] per pesi s-A_∞ è una disuguaglianza isoperimetrica associata ad un peso s-A_∞:

$$\int_\Omega \omega(x)\, dx \leq C \left(\int_{\partial\Omega} \omega^{1-\frac{1}{n}}(y) d\mathcal{H}_{n-1}(y) \right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{1.6}$$

con Ω aperto limitato e regolare ($\mathcal{H}_{n-1}$ denota come sempre la misura di Hausdorff $(n-1)-$dimensionale concentrata su $\partial\Omega$). Vogliamo osservare esplicitamente che non si potrebbe ottenere una disuguaglianza del tipo (1.6) per pesi che stanno solo nella classe A_∞, infatti questi pesi possono annullarsi su ipersuperfici. In definitiva la (1.6) mostra che i pesi s-A_∞ e le distanze ad essi associate forniscono una ragionevole deformazione della struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$. In questo lavoro confrontiamo diverse nozioni di misura di codimensione 1 associata a pesi s-A_∞ e che concidono con la misura della (1.6) per ipersuperfici regolari. Infatti, grazie ai lavori di [17] e [1], possiamo dare una nozione di perimetro (alla De Giorgi) per spazi metrici dotati di una misura doubling. A tal fine, iniziamo con il definire lo spazio delle funzioni BV associate ad un peso s-A_∞ ω, cioè lo spazio delle funzioni a variazione limitata rispetto alla misura $\omega^{1-\frac{1}{n}}(x)\, dx$, utilizzando il metodo del funzionale rilassato, così come viene definito in [17].

Definizione 5. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega \in s-A_\infty$ una funzione peso. Sia $u \in L^1(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$ (lo spazio delle funzioni integrabili rispetto alla misura $\omega^{1-\frac{1}{n}}(x)\, dx$),*

diciamo che $u \in BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ *se esiste una successione* $(u_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ *convergente ad* u *in* $L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ *e che soddisfa*

$$\limsup_{h\to+\infty} \int_\Omega |Du_h|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}(x)\,dx < \infty.$$

In aggiunta, poniamo

$$\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) := \inf \left\{ \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega |Du_h|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}(x)\,dx : (u_h) \subset \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}}),\, u_h \overset{L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})}{\longrightarrow} u \right\},$$

e

$$\|u\|_{BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})} = \|u\|_{L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})} + \|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega).$$

Diremo che $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ *se* $u \in BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ *per ogni aperto limitato* Ω *in* $\mathbb{R}^n$.

Ci possiamo chiedere perché si utilizzi l'esponente $1-\frac{1}{n}$ nella precedente definizione. Questo è proprio l'esponente che compare a secondo membro nella disuguaglianza (1.6) ed è tale disuguaglianza che giustifica la nostra scelta.

Osservazione 6. *La teoria delle funzioni BV in spazi metrici dotati di misure doubling, sviluppata in [1], [17], si fonda sulla disuguaglianza di Poincaré per questi spazi. Mostreremo nel Teorema 11 che lo spazio metrico* $(\mathbb{R}^n, d_\omega, \omega^{1-\frac{1}{n}}dx)$ *è uno spazio di Poincaré (praticamente, è valida una opportuna disuguaglianza di Poincaré pesata per le* d_ω*-palle).*

Definizione 7. *Un insieme misurabile* E *si dice di* ω*- perimetro finito in* Ω *se* $\chi_E \in BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ *e si scrive* $\|D\chi_E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) = \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega)$.

Ricordiamo inoltre:

Teorema 8. *Per ogni* $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega^{1-\frac{1}{n}})$*, la funzione* $A \to \|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A)$ *è la restizione agli aperti di* $\mathbb{R}^n$ *di una misura finita e positiva.*

Dimostrazione. Si vedano [1], Teorema 3.3 o [17], Teorema 3.4. □

In questa nota proveremo che è possibile approssimare il perimetro $\|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}$ di un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ con particolari funzionali ellittici degeneri $F_\varepsilon : L^1(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}}) \longrightarrow [0, +\infty]$ del tipo

$$F_\varepsilon = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left(\varepsilon \, |Du|^2 \, \omega^{1-\frac{2}{n}} + \frac{W(u)}{\varepsilon} \omega \right) dx & \text{se } u \in S^{1,2}(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}}) \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{1.7}$$

dove $W(u) = u^2(1-u)^2$ e

$$S^{1,2}(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}}) := \left\{ u \in L^2(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}}) \cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : |Du| \in L^2(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}}) \right\}.$$

Questo risultato è una versione, adattata alla nuova geometria del nostro spazio, di un ben noto teorema di Modica e Mortola ([19]) che propone una via per approssimare un funzionale in BV con funzionali di tipo ellittico, sicuramente più maneggevoli. La nozione di convergenza che utilizziamo è la cosiddetta Γ-convergeza ([13], ed anche [5] e [10]).

Definizione 9. *Sia X uno spazio metrico; per $\varepsilon > 0$ si considerino i funzionali $F_\varepsilon : X \to [0, +\infty]$. Diciamo che F_ε Γ-converge a F su X quando ε tende a zero se sono soddisfatte le due condizioni che seguono:*

1) per ogni $u \in X$ e per ogni famiglia $\{u_\varepsilon\}$ che converge a u in X vale

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u); \tag{1.8}$$

2) per ogni $u \in X$ esiste $\{u_\varepsilon\}$ che converge ad u in X e tale che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u) \tag{1.9}$$

Enunciamo adesso il risultato principale di questo lavoro; il corrispondente problema non degenere con $\omega \equiv 1$ è stato studiato da Modica e Mortola ([19]), di cui seguiamo la linea guida per la dimostrazione anche se la nostra prova si differenzia per molti aspetti dal caso classico.

Teorema 10 (Un Teorema tipo Modica-Mortola). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo Lipschitz. Per ogni $\varepsilon > 0$ siano F_ε definiti dalla (1.7) ed*

$$F = \begin{cases} 2\sigma\|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) & se\ u = \chi_E \in BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}}) \\ +\infty & altrimenti, \end{cases} \tag{1.10}$$

con $\sigma = \int_0^1 \sqrt{W(t)}dt$. Allora i funzionali F_ε Γ−convergono a F in $L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ se $\varepsilon \to 0$.

Una prova di questo Teorema si trova in [8], Teorema 1.11. In questa nota non daremo una prova completa di questo risultato, ma cercheremo di mettere in risalto le tappe fondamentali che ci hanno permesso di ottenerlo e quindi hanno determinato lo scheletro della dimostrazione.

Il lavoro è organizzato nel modo seguente. Nella sezione 2 si danno alcuni risultati preliminari che sono necessari alla prova del Teorema di tipo Modica-Mortola. Il risulato principale che utilizzeremo in tale dimostrazione si trova nella sezione 3, il quale asserisce che la definizione di perimetro della Definizione 7 coincide, nel caso di superfici regolari, con il contenuto di Minkowski associato alla distanza d_ω (si veda più avanti la Proposizione 20).

Concludiamo questa introduzione commentando alcune delle motivazioni che hanno dato come frutto questo lavoro. Una prima motivazione che ci ha portato allo studio di un problema del tipo Modica-Mortola per pesi s-A_∞ è la possibilità di applicare questi risultati a funzionali di Mumford-Shah pesati. Infatti, se ricordiamo il precedente esempio di peso s-A_∞ come la potenza della distanza da un insieme E chiuso ed uniformemente disconnesso, possiamo lavorare con funzionali di tipo Mumford-Shah pesati che non "vedono" la regione E quando si cercano i minimi.

Un'altra ragione, che ha portato la nostra attenzione verso lo studio di proprietà geometriche della distanza associata ad un peso s-A_∞, sta nel fatto che gli spazi metrici dotati della misura ωdx sono in un certo senso un modello generale per spazi metrici omogenei, come è provato da Semmes in [25], Proposizione

B.20.2. Questa proposizione implica in particolare che il peso ω può essere scelto del tipo $\omega(x) = \mathrm{dist}^{\mathrm{Euc}}(x,E)^s$, con $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme opportuno e $s > 0$, e quindi con ω peso continuo. Quest'ultimo fatto fornisce in un certo senso una giustificazione alla nostra ipotesi di limitarsi a considerare solo pesi continui.

Nel caso di ipesuperfici regolari di codimensione uno negli spazi di Carnot-Carathéodory, un risultato di Γ-limite che corrisponde al nostro Teorema 10 è stato di recente provato da R. Monti & F. Serra Cassano in [20].

2 Risultati Preliminari.

Cominciamo col provare una disuguaglianza di Sobolev-Poincaré sharp per palle-d_ω; questa disuguaglianza è preliminare allo sviluppo della teoria degli spazi $BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$. Questo risultato è sostanzialmente contenuto in [11].

Teorema 11. *Esiste $C_P > 0$ tale che, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, allora, per $u \in$ $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{n/(n-1)} \omega(x)dx \right)^{(n-1)/n} \le C_P r \fint_{B(x,r)} |\nabla u|\, \omega^{1-\frac{1}{n}}(x)dx. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Sia B^{Euc} una palla euclidea; integrando su B^{Euc} la disuguaglianza di Poincaré (1.10) in [11], si ha

$$\fint_{B^{\mathrm{Euc}}} |u - u_{B^{\mathrm{Euc}}}|\omega(x)dx \le C\omega(B)^{(1-n)/n} \int_{2B^{\mathrm{Euc}}} |\nabla u|\, \omega^{1-\frac{1}{n}}(x)dx. \tag{2.12}$$

Utilizzando una proprietà di self-improving valida per più generali disuguaglianze di Poincaré su palle euclidee, provata in [16], Teorema 3.1 (con $d\mu = \omega dx$, $w \equiv 1$, $r = n/(n-1)$, e $b(B^{\mathrm{Euc}},u) = \omega(B)^{(1-n)/n} \int_{2B^{\mathrm{Euc}}} |\nabla u|\, \omega^{1-\frac{1}{n}}(x)dx$), si può sostituire la norma L^1 nel membro di sinistra della (2.12) con la norma $L^{n/(n-1)}$. Quindi, per la (1.4), si ha

$$\left(\int_{B^{\mathrm{Euc}}} |u - u_{B^{\mathrm{Euc}}}|^{n/(n-1)} \omega(x)dx \right)^{(n-1)/n} \le C \int_{2B^{\mathrm{Euc}}} |\nabla u|\, \omega^{1-\frac{1}{n}}(x)dx. \tag{2.13}$$

Grazie alla (1.5), dalla (2.13) si ottiene la corrispondente disuguaglianza per le d_ω-palle:

$$\left(\int_{B(x,r)} |u - u_{B^{\mathrm{Euc}}}|^{n/(n-1)}\omega(x)dx\right)^{(n-1)/n} \leq C\int_{\lambda B(x,r)} |\nabla u|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}(x)dx, \quad (2.14)$$

dove $\lambda \geq 1$ è un'opportuna costante geometrica, e dove si denota con $u_{B^{\mathrm{Euc}}}$ la media di u su una conveniente palla euclidea associata a $B(x,r)$ come nella (1.5). Attraverso argomentazioni standard è possibile sostituire $u_{B^{\mathrm{Euc}}}$ con $u_{B(x,r)}$, la media di u su $B(x,r)$, e perciò possiamo utilizzare nuovamente la (1.4) per avere

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{n/(n-1)}\omega(x)dx\right)^{(n-1)/n} \leq Cr\fint_{\lambda B(x,r)} |\nabla u|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}(x)dx. \quad (2.15)$$

In ultimo, possiamo controllare il fattore di scala λ con tecniche di tipo standard che utilizzano la proprietà della catena di Boman, in quanto $(\mathbb{R}^n, d_\omega)$ è uno spazio di lunghezza (si veda, ad esempio, [15]). □

Il seguente risultato è un Teorema di densità di tipo Anzellotti-Giaquinta ([6]) per il nostro spazio. Questo teorema segue in maniera abbastanza immediata dalla Definizione 5.

Teorema 12. *Sia* $u \in BV(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$, *allora esiste una successione* $(u_h)_{h\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *tale che*

$$u_h \overset{L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})}{\longrightarrow} u,$$

$$\|Du_h\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) \longrightarrow \|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega).$$

Se Ω è un aperto con frontiera lipschitziana vale il seguente risultato:

Corollario 13. *Se* Ω *è un aperto limitato con frontiera lipschitziana e* $u \in BV(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$, *allora esiste una successione* $(w_h)_{h\in\mathbb{N}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$w_h \overset{L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})}{\longrightarrow} u,$$

$$\|Dw_h\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) \longrightarrow \|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega).$$

Osserviamo che

Teorema 14. *Se E è un insieme compatto, la funzione $x \to d_\omega(x, E)$ è differenziabile q.o. in $\mathbb{R}^n$ e*

$$|\nabla d_\omega(\,.\,, E)(x)| = \omega^{1/n}(x) \tag{2.16}$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Dimostrazione. Si veda teorema 2.3 in [8] □

Si può inoltre dimostrare che vale la seguente formula di rappresentazione per $\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}$ nel caso di funzioni lipschitziane.

Teorema 15. *Sia Ω un aperto limitato. Se $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ allora $u \in BV(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$ e*

$$\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) = \int_\Omega |Du|\, \omega^{1-\frac{1}{n}}\, dx. \tag{2.17}$$

Dimostrazione. È una conseguenza della continuità di ω, del teorema di Radon-Nikodym e di un risultato provato in [17](Remark 3.5-(19)); si veda per i dettagli Teorema 2.5 in [8]. □

Ricordiamo la formula di Coarea così come è dimostrata in [17], Proposizione 4.2.

Teorema 16. *Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n, \omega^{1-\frac{1}{n}})$ e si ponga $E_t = \{x;\ u(x) > t\}$, allora*

$$\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial E_t\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A)\, dt, \tag{2.18}$$

per ogni aperto A.

Corollario 17. *Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora, per ogni $u \in BV(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$, $\varphi \circ u \in BV(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$. Inoltre, se φ è una funzione crescente,*

$$\|d_\omega(\varphi \circ u)\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}},(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) \|\partial E_t\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A)\, dt, \tag{2.19}$$

per ogni aperto A.

Dimostrazione. Si procede esattamente come in [9], Corollario 4.2 □

Il seguente teorema è un teorema di rappresentazione che lega l'usuale spazio $BV(\Omega)$ con lo spazio pesato $BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$.

Teorema 18. *Sia Ω un aperto limitato, allora $BV(\Omega)\subseteq BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$.*

Inoltre, se $A\subseteq\Omega$ è un aperto ed $u\in BV(\Omega)$ si ha

$$\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A)=\int_A \omega^{1-\frac{1}{n}}\,d\,\|Du\|. \tag{2.20}$$

In particolare, se $E\subseteq\Omega$ è un insieme di Caccioppoli, ovvero $\chi_E\in BV(\Omega)$, allora

$$\|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A)=\int_A \omega^{1-\frac{1}{n}}\,d\|\partial E\|. \tag{2.21}$$

Dimostrazione. Sia $u\in BV(\Omega)$ e sia $(u_h)_h\in BV(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ convergente ad u in $L^1(\Omega)$ e tale che $\|Du_h\|(\Omega)\to\|Du\|(\Omega)$ per $h\to+\infty$. Si osservi che

$$\int_\Omega |u_h-u|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,dx\le\max_{\overline{\Omega}}(\omega^{1-\frac{1}{n}})\|u_h-u\|_{L^1(\Omega)},$$

così che, grazie alla definizione di $\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}$,

$$\begin{aligned}\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega)&\le\liminf_{h\to\infty}\textstyle\int_\Omega|Du_h|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,dx\\&\le\max_{\overline{\Omega}}(\omega^{1-\frac{1}{n}})\,\liminf_{h\to\infty}\textstyle\int_\Omega|Du_h|\,dx\\&=\max_{\overline{\Omega}}(\omega^{1-\frac{1}{n}})\,\|Du\|(\Omega)<\infty,\end{aligned}$$

e quindi $u\in BV(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ e la prima parte del teorema è dimostrata.

Ora, se ripetiamo la stessa argomentazione per ogni aperto $A\subseteq\Omega$ si ha

$$\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A)\le\max_{\overline{A}}\omega^{1-\frac{1}{n}}\,\|Du\|(\Omega). \tag{2.22}$$

Utilizzando il Teorema 8, esiste una misura finita positiva μ in Ω tale che $\|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A)=\mu(A)$ per ogni aperto $A\subseteq\Omega$ e per la (2.22) segue che μ è assolutamente continua rispetto a $\|Du\|$ (che è una misura di Radon). Infatti se $E\subseteq\Omega$ è tale che $\|Du\|(E)=0$ allora

$$0=\inf\{\|Du\|(A):\ A\supseteq E,\ A\ \text{aperto}\},$$

quindi, per la (2.22), $\mu(E)=0$. Grazie al teorema di Radon-Nikodym, esiste $g_u\in L^1(\Omega,\,d\,\|Du\|)$ tale che

$$d\mu=g_u\,d\,\|Du\|. \tag{2.23}$$

Vogliamo provare che $g_u = \omega^{1-\frac{1}{n}}\ \|Du\|$−q.o. in Ω. A tal fine, scegliamo un aperto $A \subseteq \Omega$.

Ponendo $\min\limits_{\overline{A}} \omega^{1-\frac{1}{n}} = m_A$ e supponendo per il momento $m_A > 0$, si osserva che se $u_h \in \mathrm{Lip}\,(A)$ e $u_h \to u$ in $L^1(A,\, \omega^{1-\frac{1}{n}})$, allora $\|u_h - u\|_{L^1(A)} \leq m_A^{\frac{1}{n}-1} \int_A |u_h - u|\, \omega^{1-\frac{1}{n}}\, dx \to 0$ per $h \to \infty$.

Quindi

$$\begin{aligned} m_A^{1-\frac{1}{n}}\ \|Du\|(A) &\leq m_A^{1-\frac{1}{n}} \liminf_{h\to\infty} \int_A |Du_h|\, dx \\ &\leq \liminf_{h\to\infty} \int_A |Du_h|\, \omega^{1-\frac{1}{n}}\, dx \end{aligned}$$

e se si prende l'estremo inferiore su tutte le successioni $(u_h)_{h\in\mathbf{N}}$, otteniamo che

$$m_A^{1-\frac{1}{n}}\ \|Du\|(A) \leq \|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A). \tag{2.24}$$

Dunque, quando $m_A > 0$, ricordando anche la (2.22), si ha

$$\inf_{\overline{A}} \omega^{1-\frac{1}{n}}\ \|Du\|(A) \leq \|Du\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A) \leq \sup_{\overline{A}} \omega^{1-\frac{1}{n}}\ \|Du\|(A). \tag{2.25}$$

Chiaramente la (2.25) vale però anche se $m_A = 0$.

Scegliamo $A = B(x,r)$, per la (2.23) e la (2.25)

$$\inf_{B(x,r)} \omega^{1-\frac{1}{n}}\ \|Du\|(B(x,r)) \leq \int_{B(x,r)} g_u\, d\|Du\| \leq \sup_{B(x,r)} \omega^{1-\frac{1}{n}}\ \|Du\|(B(x,r)). \tag{2.26}$$

si noti poi che $S = \{x \in \Omega;\ \|Du\|(B(x,r)) = 0\ for\ 0 < r \leq r_x\}$ è di $\|Du\|$-misura nulla. Infatti, si può prendere un ricoprimento di Vitali $\{B_j\} = \{B(x_j;\ \frac{1}{5})\, r_{x_j}\}$ di S da cui $\|Du\|(S) \leq \sum_j \|Du\|(5\,B_j) = 0$. Allora, se $x \in \Omega \backslash S$, dividendo nella (2.26) per $\|Du\|(B(x,r))$ e facendo il limite per $r \to 0+$ si ha che $g_u(x) = \omega^{1-\frac{1}{n}}(x)$ per $\|Du\|$- q.o. $x \in \Omega$; infatti per il teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch e ricordando che ω è continuo, in modo tale che sia $\inf\limits_{B(x,r)} \omega^{1-\frac{1}{n}}$ che $\sup\limits_{B(x,r)} \omega^{1-\frac{1}{n}}$ tendono a $\omega^{1-\frac{1}{n}}(x)$ quando r tende a zero, si ottiene che $g_u(x) = \omega^{1-\frac{1}{n}}(x)$ per $\|Du\|$- q.o. $x \in \Omega$. Questo e la (2.23), provano la (2.20) e la dimostrazione è conclusa. □

Se E è di ω-perimetro finito e inoltre ∂E è una varietà di classe C^2 si ha che $d\|\partial E\| = d\mathcal{H}_{n-1}\lfloor\partial E$ e come corollario del precedente risultato si ha che:

Corollario 19. *Se E è di ω-perimetro finito e inoltre ∂E è una varietà di classe C^2, allora per ogni aperto $A \subseteq \Omega$*

$$\|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(A) = \int_{\partial E\cap A} \omega^{1-\frac{1}{n}}\, d\mathcal{H}_{n-1}.$$

3 Principali Risultati di convergenza.

Il risulato chiave che ci serve nella dimostrazione del Teorema 10 è il seguente.

Proposizione 20. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con frontiera $\partial E \in C^\infty$ Sia $r > 0$, definiamo un intorno tubolare di ∂E:*

$$I_r = I_r(\partial E) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d_\omega(x, \partial E) < r\}.$$

Per un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, poniamo

$$M^+(\partial E)(\Omega) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\omega(I_r \cap \Omega)}{2r},$$

e

$$M^-(\partial E)(\Omega) = \liminf_{r\to 0+} \frac{\omega(I_r \cap \Omega)}{2r}.$$

Se $\mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \partial\Omega) = 0$ allora

$$M^+(\partial E)(\Omega) = M^-(\partial E)(\Omega) = \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) \tag{3.27}$$

Dimostrazione - cenni. Denotiamo con $\tilde{d}_\omega(x) = \tilde{d}_\omega(x, \partial E)$ la distanza con segno di x da ∂E, ovvero

$$\tilde{d}_\omega(x) = \begin{cases} d_\omega(x, \partial E) & \text{se } x \in E, \\ -d_\omega(x, \partial E) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$$

e poniamo

$$\varphi_\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\rho}\tilde{d}_\omega(x) & \text{se } |\tilde{d}_\omega(x)| < \rho, \\ 1 & \text{se } \tilde{d}_\omega(x) \geq \rho, \\ 0 & \text{se } \tilde{d}_\omega(x) \leq -\rho. \end{cases}$$

Poiché $\varphi_\rho \to \chi_E$ in $L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$, essendo la misura variazione inferiormente semicontinua ([17], Proposizione 3.6), per il Teorema 15 e per la (2.16) si ha

$$\begin{aligned}\|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) &\leq \liminf_{\rho\to 0+} \|D\varphi_\rho\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) = \liminf_{\rho\to 0+} \int_\Omega |D\varphi_\rho|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,dx \\ &= \liminf_{\rho\to 0+} \frac{1}{2\rho}\int_{\{|\tilde{d}|<\rho\}\cap\Omega} \omega(x)\,dx = \liminf_{\rho\to 0+}\frac{1}{2\rho}\,\omega(I_\rho\cap\Omega) \\ &= M^-(\partial E)(\Omega).\end{aligned}$$

Dobbiamo ancora provare che

$$M^+(\partial E)(\Omega) \leq \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega). \tag{3.28}$$

Una dimostrazione completa si trova in [8], Proposizione 3.1. Qui daremo soltanto alcuni cenni della prova.

passo 1: Fissiamo $\eta > 0$ e poniamo $\omega_{\eta/2} = \max\{\omega,\ \eta/2\}$. Allora per $\rho < \rho(\eta)$ e per ogni $x \in I_\rho \cap \{\omega > \eta\}$ si ha

$$d_\omega(x,\partial E) = d_{\omega_{\eta/2}}(x,\partial E)$$

passo 2: Esiste una famiglia di funzioni $(\sigma_{\varepsilon,\eta})_{\varepsilon>0} \in C^\infty$ tali che

i) $\frac{\eta}{4} \leq \sigma_{\varepsilon,\eta} \leq \omega_{\eta/2} \leq \sigma_{\varepsilon,\eta} + 2\varepsilon$ $(\varepsilon < \varepsilon(\eta))$;

ii) $\sigma_{\varepsilon,\eta} \to \omega_{\eta/2}$ uniformemente per $\varepsilon \to 0$ sui compatti.

passo 3:

$$M^+(\partial E)(\{\omega > \eta\}\cap\Omega) \leq \int_{\partial E} \omega^{1-\frac{1}{n}}\,d\mathcal{H}_{n-1} \tag{3.29}$$

passo 4: Sia $\rho < \rho(\eta)$, allora per ogni $x \in I_\rho \cap \{\omega < \eta\}$ esiste una palla euclidea $B_x^{\mathrm{Euc}} = B^{\mathrm{Euc}}(\xi_x, r_x)$ tale che

i) $x \in B_x^{\mathrm{Euc}}$;

ii) $|B_x^{\mathrm{Euc}} \cap E| \approx |B_x^{\mathrm{Euc}} \setminus E| \approx |B_x^{\mathrm{Euc}}|$;

iii) $\omega(B_x^{\mathrm{Euc}}) \leq c_0\,\rho^n$ dove c_0 è una costante geometrica che non dipende da ρ, η o da x;

iv) $\omega < 2\eta$ in B_x^{Euc}.

passo 5: Esiste una costante geometrica c_3 tale che $\omega\Big(I_\rho \cap \{\omega < \eta\}\Big) \leq c_3 \rho \eta^{1-\frac{1}{n}}$.

Dalle precedenti osservazioni segue che

$$\begin{aligned} M^+(\partial E)(\Omega) &\leq M^+(\partial E)(\{\omega > \eta/2\}) + \limsup_{\rho \to 0} \frac{\omega\Big(I_\rho \cap \{\omega < \eta\}\Big)}{2\rho} \\ &\leq \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) + c\eta^{1-\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Poiché $\eta > 0$ è arbitrario è vera la (3.28); in conclusione si ottiene quindi l'uguaglianza $M^+(\partial E)(\Omega) = M^-(\partial E)(\Omega) = \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega)$. □

Il seguente Lemma tecnico lega il risultato della Proposizione 20 con la prova del nostro risultato di $\Gamma-$convergenza.

Lemma 21. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ lipschitziana. Sia $E \subset\subset \Omega$ un insieme misurabile tale che $0 < \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) < \infty$. Allora esiste una successione $(E_s)_{s\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ di aperti limitati e C^∞ che verificano $\mathcal{H}_{n-1}(\partial E_s \cap \partial\Omega) = 0$, $\chi_{E_s} \to \chi_E$ in $L^1(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$ e $\|\partial E_s\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) \to \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Si veda la prova del Lemma 3.3 in [8]. □

Diamo adesso un cenno anche della dimostrazione del Teorema 10 per i funzionali F_ε, $F : L^1(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}}) \longrightarrow [0, +\infty]$ della forma

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left(\varepsilon |Du|^2 \omega^{1-\frac{2}{n}} + \frac{W(u)}{\varepsilon}\omega\right) dx & \text{se } u \in S^{1,2}(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}}) \\ +\infty\,. & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{3.30}$$

con $W(u) = u^2(1-u)^2$,

$$S^{1,2}(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}}) = \left\{u \in L^2(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}}) \cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) : |Du| \in L^2(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}})\right\},$$

e

$$F = \begin{cases} 2\sigma \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) & \text{se } u = \chi_E \in BV(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}}) \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{3.31}$$

con $\sigma = \int_0^1 \sqrt{W(t)}dt$.

Cenni della dimostrazione del Teorema 10. Sia $\varepsilon_h \to 0$ e scriviamo $F_h := F_{\varepsilon_h}$. Per provare che $F = \Gamma - \lim_{h\to\infty} F_h$ cominciamo dalla (1.8) della Definizione 9, dove $X = L^1(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$.

Sia $u_h \longrightarrow u$ in $L^1(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$. Non è restrittivo supporre che $\liminf_{h\to\infty} F_h(u_h) < \infty$ e, a meno di passare ad una sottosuccessione, che $u_h(x) \longrightarrow u(x)$ q.o. $x \in \Omega$. Per il Lemma di Fatou si ha

$$\int_\Omega W(u(x))\omega(x)\,dx \le \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega W(u_h(x))\omega(x)\,dx \le \liminf_{h\to\infty} \varepsilon_h\, F_h(u_h) = 0$$

Ricordando che W è una funzione continua e positiva, dall'espressione precedente segue che $u(x) \in \{0,1\}$ per q.o. $x \in \Omega$. Poniamo $E := \{x \in \Omega :\ u(x) = 1\}$, così che $u = \chi_E$.

Possiamo supporre che $0 \le u_h \le 1$ (altrimenti basta sostituire u_h con $\overline{u}_h(x) := \max\{0,\ \min\{u_h(x), 1\}\}$ osservando che $F_h(\overline{u}_h) \le F_h(u_h)$). Consideriamo la funzione crescente $\varphi(t) = \int_0^t \sqrt{W(s)}\,ds$, osservando che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$; componiamola con u e u_h, definendo $w(x) = \varphi(u(x))$ e $w_h(x) = \varphi(u_h(x))$. È facile verificare che $w_h \in S^{1,2}(\Omega; \omega^{1-\frac{2}{n}})$. È inoltre immediato provare che $w_h \longrightarrow w$ in $L^1(\Omega; \omega^{1-\frac{1}{n}})$. Infatti,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_h - w|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,dx &= \int_\Omega \left| \int_0^{u_h(x)} \sqrt{W(s)}\,ds - \int_0^{u(x)} \sqrt{W(s)}\,ds \right| \omega^{1-\frac{1}{n}}(x)\,dx \\ &\le \Big(\sup_{s\in[0,1]} \sqrt{W(s)} \Big) \int_\Omega |u_h - u|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,dx \to 0.\end{aligned}$$

Per la formula di coarea (2.18) ed il Corollario 17

$$\begin{aligned}\|Dw\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial\{x\in\Omega :\ \varphi(u(x)) > t\}\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega)\,dt \\ &= \int_0^1 \|\partial\{x\in\Omega :\ u(x) > t\}\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega)\,\sqrt{W(t)}\,dt \\ &= \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) \int_0^1 \sqrt{W(t)}\,dt = \frac{1}{2}\,F(u).\end{aligned}$$

Essendo la variazione totale inferiormente semicontinua si ha

$$\begin{aligned} F(u) = {} & 2\|Dw\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) \\ & \leq 2\liminf_{h\to\infty}\int_\Omega |Dw_h|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,dx \\ & \leq 2\liminf_{h\to\infty}\int_\Omega \sqrt{\varepsilon_h}\,|Dw_h|\,\omega^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_h}}\,\varphi'(u_h(x))\,\omega^{\frac{1}{2}}\,dx \\ & \leq \liminf_{h\to\infty}\Big(\int_\Omega \varepsilon_h|Dw_h|^2\,\omega^{1-\frac{2}{n}}\,dx + \frac{1}{\varepsilon_h}\int_\Omega W(u_h(x))\omega(x)\,dx\Big) \\ & = \liminf_{h\to\infty} F_h(u_h), \end{aligned}$$

e la (1.8) è provata.

Dobbiamo ancora provare la (1.9). Di questa daremo solo dei cenni. Si può far vedere (Lemma 3.2 in [8]) che basta provare la (1.9) non per tutte le funzioni di $L^1(\Omega;\omega^{1-\frac{1}{n}})$ ma solo per quelle di un suo sottinsieme,

$$D = \{\chi_E :\ E \text{ aperto limitato con frontiera } C^\infty,\ \text{tale che } \mathcal{H}_{n-1}(\partial\Omega\cap\partial E) = 0\}.$$

Consideriamo la distanza con segno $\tilde{d}_\omega(x) = \tilde{d}_\omega(x,\,\partial E)$ di x da ∂E, cioè

$$\tilde{d}_\omega(x) = \begin{cases} d_\omega(x,\,\partial E) & \text{se } x\in E\cap\Omega, \\ -d_\omega(x,\,\partial E) & \text{se } x\in\Omega\setminus E. \end{cases}$$

Con un procedimento standard (che è mostrato in [8]) costruiamo la successione $\{u_\varepsilon\}$ tale che,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega |u_\varepsilon(x)-u(x)|\,\omega^{1-\frac{1}{n}}\,dx = 0, \tag{3.32}$$

e tale che

$$F(u) = \lim_{\varepsilon\to0} F_\varepsilon(u_\varepsilon). \tag{3.33}$$

Per vedere questo si utilizza in maniera sostanziale il fatto che $|D\tilde{d}_\omega(x)| = \omega^{1/n}(x)$ q.o. in $\Omega\setminus\partial E$ e che, se poniamo $E_s = \{x\in\Omega : \tilde{d}_\omega(x) < s\}$ e $V(t) = \omega\Big(\{x\in\Omega : |\tilde{d}_\omega(x)| \leq t\}\Big)$ per $t\geq 0$, allora si prova che per $t>0$ vale

$$V(t) = \int_{-t}^{t} \|\partial E_s\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega)ds \quad \text{e} \quad V'(t) = \|\partial E_t\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) + \|\partial E_{-t}\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega) \tag{3.34}$$

per q.o. $0 < t < t_o$ e che per la Proposizione 20 si ha che

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{V(t)}{2t} = \|\partial E\|_{\omega^{1-\frac{1}{n}}}(\Omega).$$

Per i dettagli di questa parte della dimostrazione (che è molto tecnica ma standard), rimandiamo ancora una volta a [8].

□

Riferimenti bibliografici

[1] L. Ambrosio, *Some fine properies of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric spaces*, Adv. in Math., to appear.

[2] L.Ambrosio, N.Fusco, D.Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, 2000.

[3] L.Ambrosio, B.Kirchheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, Math. Annalen, 318 (2000), 527–555.

[4] L.Ambrosio, B.Kirchheim, *Currents in metric spaces*, Acta Math., 185 (2000), 1–80.

[5] G. Alberti, *Variational models for phase transitions, an approach via Gamma-convergence*, to appear on Differential Equations and Calculus of Variations (G. Buttazzo and al. eds.) Springer, Berlin 1999.

[6] G. Anzellotti, M. Giaquinta, *Funzioni BV e tracce*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova vol. 60 (1976), 1-21.

[7] A. Baldi, *Weighted BV Function*, to appear on Houston J. of Math. (2000).

[8] A. Baldi, B. Franchi, *A Γ-convergence result for doubling metric measures and associated perimeters*, preprint (2001).

[9] G.Bellettini, G. Bouchitté, I.Fragalà, *BV functions with respect to a measure and relaxation of metric integral functionals* , J. of Convex Anal. 6 (1999), 349–366.

[10] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Longman, Harlow, (1989).

inequalities and estimates for weighted Peano maximal

[11] G. David, S. Semmes, *Strong A_∞ weights, Sobolev inequalities and quasiconformal mappings,* Analisys and partial differential equations. Lecture notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 122 (1990).

[12] E. De Giorgi, *Frontiere orientate di misura minima*, Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61 Editrice Tecnico Scientifica, Pisa (1961).

[13] E. De Giorgi, T. Franzoni, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 58 (1975), 842-850.

[14] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag (1969).

[15] B.Franchi, C.E.Gutiérrez, R.L.Wheeden, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operators*, Comm. Partial Differential Equations, 19, (1994), 523–604.

[16] B. Franchi, C. Perez, R.L. Wheeden, *Self improving properties of Jhon-Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Functional Analysis 153 (1998), 108-146.

[17] M. Miranda, *Functions of bounded variation on "good" metric measure spaces*, forthcoming.

[18] L.Modica, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal., **98** (1987), 123–142.

[19] L. Modica, S. Mortola, *Un esempio di Γ-convergenza,* Bollettino Unione Matematica Italiana, 14-B (1977), 285-299 .

[20] R. Monti, F. Serra Cassano, *Surface measures in Carnot-Carathéodory spaces*, su Calculus of Variations, (2001).

[21] B. Muckenoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.

[22] D. Mumford and J. Shah, *Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems,* Comm. Pure Appl. Math., XLII (1989), 577-685.

[23] S. Semmes, *Bilipschitz mapping and strong A_∞ weights*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 18 (1993), 211-248.

[24] S. Semmes, *On the non existence of bilipschitz parametrizations and geometric problems about A_∞ weights*, Rev. Matem. Iberoamericana 12-2 (1996), 337-410.

[25] S. Semmes, *Metric spaces and mappings seen at many scales*, in M. Gromov, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. With appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes. Edited by J. LaFontaine and P. Pansu. Progress in Mathematics 152, Birkhaüser, Boston, MA (1999).